

Title	シリンダー測度の回転と可測ノルム (函数解析学と数理情報の接点)
Author(s)	原井, 敬子; 前田, ミチエ
Citation	数理解析研究所講究録 (2002), 1253: 14-25
Issue Date	2002-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/41847">http://hdl.handle.net/2433/41847</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# シリンダー測度の回転と可測ノルム

お茶の水女子大学大学院人間文化研究科 原井 敬子 (Keiko Harai)

同理学部 前田 ミチエ (Michie Maeda)

## 1 導入

無限次元空間上での測度論を研究するうえで、無限次元という性質上、考えやすい有限測度、その中でも重要な Gauss 測度に注目する。この Gauss 測度は無限次元 Hilbert 空間上ではシリンダー測度であり、 $\sigma$ -加法性を満たしていない。この Gauss シリンダー測度を測度に拡張するための条件として、Gross が可測ノルムという概念を導入した。その後、Dudley-Feldman-LeCam らが、一般のシリンダー測度を測度に拡張するための必要十分条件として、別の可測ノルムの概念を導入した。この二つの可測ノルムの条件は、Gauss シリンダー測度に関しては同値であることは示されている。この同値性は、Gauss シリンダー測度のもつ回転不変な性質を利用して証明できるので、回転不変シリンダー測度、回転準不変シリンダー測度についても、これらが同値であることが示される。また、Gauss シリンダー測度に関して可測なノルム  $\|\cdot\|$  に対して、必ず、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < +\infty$  となる完全正規直交基底  $\{e_n\}$  が存在するのかという Conjecture がある。Gauss シリンダー測度に関して可測となる代表的な Hilbert-Schmidt operator を使ったノルムでは、すべての完全正規直交基底  $\{e_n\}$  に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < +\infty$  となるのであるが、一方 Goodman により、Gauss シリンダー測度に関して可測なノルムでも、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = +\infty$  となる正規直交基底  $\{e_n\}$  が存在するようなノルムの例もあげられている。今回は、この Goodman の example を中心に調べてみた。また、前回、具体的にシリンダー測度とノルムを構成して、上の二つの可測ノルムとそれらの類似した条件との関係について調べたが、それに関して新たに分かったことも追加としてここに紹介する。

## 2 準備

この論文では、 $X$  を Banach 空間、 $X'$  を  $X$  の位相的 dual 空間とし、 $(\cdot, \cdot)$  を  $X'$  と  $X$  の natural pairing とする。また、 $\mathcal{B}(X)$  を  $X$  上の Borel  $\sigma$ -algebra とする。  $H$  を実可

分 Hilbert 空間、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $H$  上の内積、 $FD(H)$  を  $H$  の有限次元部分空間全体、 $\mathcal{F}$  を  $H$  上の有限次元部分空間への直交射影の全体とする。また、 $I$  で恒等写像を表すことにする。

$Z$  が、 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in X', D \in \mathcal{B}(R^n)$  に対して、次のように表されるとき、シリンダー集合という。

$$Z = \{x \in X; ((\xi_1, x), (\xi_2, x), \dots, (\xi_n, x)) \in D\}$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  を固定したときのシリンダー集合全体  $\mathcal{R}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}$  は  $\sigma$ -algebra になるが、シリンダー集合全体  $\mathcal{R}$  は  $\sigma$ -algebra になるとは限らない。

また、Hilbert 空間上のシリンダー集合は、直交射影を使って次のように表すことができる。

$$Z = \{x \in H; Px \in F\} \quad (P \in \mathcal{F}, F \in \mathcal{B}(PH))$$

上に述べたシリンダー集合の上にシリンダー測度を定義する。

**定義 2.1 (シリンダー測度)**  $\mathcal{R}$  上に定義された関数  $\mu$  が次の条件を満たすとき、シリンダー測度であるという。

- (i)  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$
- (ii)  $\mu$  の  $\mathcal{R}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}$  への制限は確率測度

さらに、Hilbert 空間上で重要な役割を果たす Gauss シリンダー測度を定義する。

**定義 2.2 (Gauss シリンダー測度)** 集合関数  $\gamma_t : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$  が次のような形で表されるとき、パラメータ  $t$  の Gauss シリンダー測度であるという。ここで、 $0 < t < \infty$  とする。

$$\gamma_t(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx$$

ただし、 $Z = \{x \in H; Px \in F\}$ 、 $n = \dim PH$ 、 $dx$  は  $PH$  上の Lebesgue 測度とする。

**注意 1**  $t = 1$  のとき、 $\gamma_1(Z)$  は標準的 Gauss シリンダー測度とよばれ、通常、単に  $\gamma$  と表す。

次に、可測ノルムの定義をする。

**定義 2.3 (Gross の可測ノルム)** 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $P_0 \in \mathcal{F}$  が存在して、 $P \perp P_0$  となるどんな  $P \in \mathcal{F}$  に対しても、

$$\mu(\{x \in H; \|Px\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つとき、 $\|\cdot\|$  は  $\mu$ -可測 (Gross) であるという。

上の定義は次のように書きかえることができる。

$\|\cdot\|$  は  $\mu$ -可測 (Gross)

$\iff$

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $G \in FD(H)$  が存在して、 $F \perp G$  となるどんな  $F \in FD(H)$  に対しても、

$$\mu(\{N_\varepsilon \cap F + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

ただし、 $N_\varepsilon = \{x \in H; \|x\| \leq \varepsilon\}$ ,  $F^\perp$  は  $F$  の直交補空間とする。

無限次元 Hilbert 空間上では、Gauss シリンダー測度  $\gamma$  は可算加法的測度ではない。そこで、初めの位相よりも弱い位相を導入する新しいノルムを考え、これに関する完備化空間の中ではじめの空間上のシリンダー測度を埋め込み写像による像測度として考える。これが可算加法的となるための十分条件を求めたのが、L.Gross である。

Gross が可測ノルムを定義した後、Dudley-Feldman-LeCam が別の可測ノルムを定義した。この可測ノルムはシリンダー測度を可算加法的測度に拡張するための必要十分条件となるものである。

**定義 2.4 (D.F.L の可測ノルム)** 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $G \in FD(H)$  が存在して、 $F \perp G$  となるどんな  $F \in FD(H)$  に対しても、

$$\mu(\{x \in H; \|x - F^\perp\| < \varepsilon\}) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つとき、 $\|\cdot\|$  は  $\mu$ -可測 (D.F.L) であるという。

上の定義も次のように書きかえることができる。

$\|\cdot\|$  は  $\mu$ -可測 (D.F.L)

$\iff$

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $G \in FD(H)$  が存在して、 $F \perp G$  となるどんな  $F \in FD(H)$  に対しても、

$$\mu(\{P_F(N_\varepsilon) + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

ただし、 $P_F$ は  $H$  から  $F$  への直交射影とする。

したがって、2つの可測ノルムの条件を比較すると、D.F.Lの可測ノルムの条件よりも Gross の可測ノルムの条件の方が強い条件であることが分かる。

次に、Gross の可測ノルムの条件、D.F.Lの可測ノルムの条件を取り囲む条件とその関係を紹介する。

**定理 2.5**  $H$  を実可分ヒルベルト空間、 $\mu$  を  $H$  上のシリンダー測度、 $\|\cdot\|$  を  $H$  上で定義された連続なノルム、 $B$  を  $\|\cdot\|$  に関する  $H$  の完備化とする。このとき、次の (i) から (vi) に対して、 $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$  が成り立つ。

(i)  $I$  に強収束する  $\mathcal{F}$  の任意の増加列  $P_n$  が、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) = 0$$

を満たす。

(ii)  $\|\cdot\|$  は  $\mu$ -可測 (Gross) である。

(iii)  $I$  に強収束する増加列  $P_n \in \mathcal{F}$  で、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) = 0$$

を満たすものが存在する。

(iv)  $I$  に強収束する増加列  $P_n \in \mathcal{F}$  で、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in H; \sup_{1 \leq k \leq n} \|P_k x\| > N\}) = 0$$

を満たすものが存在する。

(v)  $\|\cdot\|$  は  $\mu$ -可測 (D.F.L) である。

(vi)  $i(\mu)$  は測度に拡張できる。

ただし、 $i$  は  $H$  から  $B$  への埋め込み写像で、 $i(\mu) = \mu \circ i^{-1}$  とする。

### 3 シリンダー測度の回転

ここでは、Gauss シリンダー測度を含み、その1つの特性である回転不変性をもつシリンダー測度の全体、さらに、これを一般化した回転準不変シリンダー測度等の定義をする。

**定義 3.1 (回転不変シリンダー測度)**  $\mu$  を  $H$  上のシリンダー測度とする。  $U$  を  $H$  上のユニタリ作用素の全体とする。

$$\mu(C) = \mu(u(C)) \quad (u \in U, C \in \mathcal{R}_H)$$

が常に成り立つとき、 $\mu$ を回転不変シリンダー測度という。

ただし、 $\mathcal{R}_H$ を  $H$  上のシリンダー集合全体とする。

**定義 3.2 (回転準不変シリンダー測度)** 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $\delta > 0$  で、 $\mu(C) < \delta \Rightarrow \mu(u(C)) < \varepsilon$  ( $u \in U, C \in \mathcal{R}_H$ ) を満たすようなものが存在するとき、 $H$  上のシリンダー測度  $\mu$  は回転準不変シリンダー測度であるという。

ここで、シリンダー的に絶対連続であるという定義をする。

**定義 3.3**  $\mu$  と  $\nu$  を  $H$  上シリンダー測度とする。任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、次のようなものを満たす  $\delta > 0$  が存在するとき、 $\nu$  が  $\mu$  に対してシリンダー的に絶対連続であるという。

$$\mu(C) < \delta \Rightarrow \nu(C) < \varepsilon \quad (C \in \mathcal{R}_H)$$

さらに、 $\nu$  が  $\mu$  に対してシリンダー的に絶対連続であるとき、 $\nu \ll_c \mu$  と表す。 $\nu \ll_c \mu$  かつ  $\mu \ll_c \nu$  であるとき、 $\mu$  と  $\nu$  がシリンダー的に同値であるといい、 $\nu \sim_c \mu$  と表す。

上で述べた回転不変なシリンダー測度は、次のように表すことができる。  
 $\mu$  が  $H$  上回転不変シリンダー測度であるとは、 $[0, \infty)$  上の確率測度  $\sigma_\mu$  が存在して、 $\mu(A) = \int_0^\infty \gamma_t(A) d\sigma_\mu(t)$  となることである。ここで  $\gamma_0 = \delta_0$  とする。

また、回転準不変シリンダー測度も次のように表すことができる。  
 $\mu$  が  $H$  上回転準不変シリンダー測度であるとは、 $\mu \sim_c \lambda$  を満たす  $H$  上回転不変シリンダー測度  $\lambda$  が存在することである。

回転不変シリンダー測度  $\mu$  の回転によるある種の平均化をすることによって得られる  $\lambda$  は、 $\mu$  と一致するが、回転準不変シリンダー測度の場合、 $\lambda$  は  $\mu$  と異なる。この  $\lambda$  の構成については、Maeda([10]) を参照。

次に、回転不変シリンダー測度、回転準不変シリンダー測度と定理 2.5 の条件との関係を紹介する。

**定理 3.4**  $\mu$  を  $H$  上の回転準不変シリンダー測度とする。このとき、定理 3.1 の (i) ~ (vi) はすべて同値である。

**系 1**  $\mu$  を  $H$  上の回転不変シリンダー測度とすると、定理 3.1 の (i) ~ (vi) はすべて同値

## 4 $\gamma$ -可測とノルムの関係

今までは、シリンダー測度に条件をつけて定理の条件 (i) から (vi) を考えてきた。回転準不変シリンダー測度 (回転不変シリンダー測度、Gauss シリンダー測度) に対しては、(i) から (vi) の条件がすべて同値になることは示されている。これらの条件は、シリンダー測度の性質だけでなくノルムの性質とも深くかかわっている。そこで、今回はノルムの条件に着目してみた。

まず、ノルムを次のように定義する。

$$\|X\|_{HS} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n}{n}\right)^2} \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$$

この  $\|\cdot\|_{HS}$  は  $\gamma$ -可測となる代表的なノルムであり、Hilbert-schmidt operator を使ったノルムであることから、次のことが簡単に示される。

**定理 4.1**  $\|\cdot\|_{HS}$  については、すべての正規直交基底  $\{e_n\}$  に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|_{HS}^2 < \infty$  となり、一定の値をとる。

$\gamma$ -可測となるノルムについては、すべての  $\{e_n\}$  について、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < \infty$  となるのではないかと考えられていたが、Goodman により、ある正規直交基底  $\{e_n\}$  に対しては、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = \infty$  となる  $\gamma$ -可測なノルムが存在することが示された。ここでは、Goodman のノルムを少し一般化してまとめ、さらに独自の証明を紹介する。

**定理 4.2**  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$  に対して、 $\|(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)\|_{G(h)} = \sup_n n^{-h} |x_n|$  とすると、

$h \geq \frac{1}{2}$  のとき、 $\|(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)\|_{G(h)}$  は、 $\gamma$ -可測となる。

$h > \frac{1}{2}$  のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|_{G(h)}^2 < \infty$  となる。

$h = \frac{1}{2}$  のとき、 $\|e_n\|_{G(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}}$  となり、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|_{G(h)}^2 = \infty$  となる。

**証明**  $\|(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)\|_{G(\frac{1}{2})}$  が、 $\gamma$ -可測となることを示せば十分である。

まず、 $\int_{-k}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > \sqrt{1 - e^{-\frac{k^2}{2}}}$  であることを示す。

$$\left(\int_0^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_0^k \int_0^k e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$  とおくと、

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 &> \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^k e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{k^2} \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} dt d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [e^{-\frac{t}{2}}]_0^{k^2} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-\frac{k^2}{2}} + 1) d\theta = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-\frac{k^2}{2}})
\end{aligned}$$

よって、

$$\int_0^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx > \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - e^{-\frac{k^2}{2}}}$$

となり、

$$\int_{-k}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx > \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - e^{-\frac{k^2}{2}}} = \sqrt{1 - e^{-\frac{k^2}{2}}}$$

$$\sum_{k=1}^n e^{-\frac{k}{2}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{e}} - 1} \text{ より、} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}} \text{ が収束し、} \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - e^{-\frac{k}{2}}} \text{ も収束する。}$$

また、 $\prod_{k=1}^N \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  は単調減少列で下に有界であることから、

$$\prod_{k=1}^{\infty} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ も収束する。}$$

よって、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > m > N \text{ に対して、} \left| \prod_{k=m+1}^n \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 1 \right| < \varepsilon$$

ゆえに、

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > m > N$  に対して、

$$\begin{aligned}
\gamma(\{x \in \ell^2; \|P_n x - P_m x\|_{G(\frac{1}{2})} \leq \varepsilon\}) &\geq \gamma(\{x \in \ell^2; |x_k| \leq \varepsilon \sqrt{k}, k = m+1, \dots, n\}) \\
&= \prod_{k=m+1}^n \int_{-\varepsilon \sqrt{k}}^{\varepsilon \sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

□

ここで、Conjecture を一つ紹介する。

**Conjecture (Kuo)**

$\|\cdot\|$  が  $\gamma$ -可測ならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < +\infty$  となる  $\{e_n\}$  が存在するのか？

上に述べた Conjecture の直接的な答えではないが、次のようなノルムに対して得られた結果を紹介する。



まず、open, convex, absorbing, circled な集合  $U$  を次のように定義する。 $\{\beta_n\}$  は正の実数列で単調増加で、 $\beta_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) とする。 $\Gamma$  を  $\{\pm\beta_n(e_1+e_2+\dots+e_n); n=1, 2, \dots\}$  の convex hull とし、 $B$  を  $\ell^2$  上の開単位球とし、 $U = \Gamma + B$  とする。このとき、 $U$  の gauge として、 $\|\cdot\|_1$  を定義する。

このように定義したノルム  $\|\cdot\|$  については、 $\{\beta_n\}$  のとり方によってはある正規直交基底  $\{e_n\}$  に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|_1^2 < \infty$  となることが示せる。以下にそれを述べる。

$$\beta_1 e_1 \in \Gamma_1 \text{ なので、} \|e_1\|_1 \leq \frac{1}{\beta_1}$$

$$\beta_2(e_1+e_2) \in \Gamma_1, -\beta_1 e_1 \in \Gamma_1, \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} = 1 \text{ なので、}$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} \beta_2(e_1+e_2) + \frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} (-\beta_1 e_1) \in \Gamma_1$$

$$\text{よって、} \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1+\beta_2} e_2 \in \Gamma_1 \text{ となり、} \|e_2\|_1 \leq \frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1 \beta_2}$$

同様に、

$$-\beta_{n-1}(e_1+\dots+e_{n-1}) \in \Gamma_1, \beta_n(e_1+\dots+e_{n-1}+e_n) \in \Gamma_1, \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1}+\beta_n} + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}+\beta_n} = 1$$

より、

$$\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1}+\beta_n}(e_1+\dots+e_n) + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}+\beta_n}(e_1+\dots+e_{n-1}) \in \Gamma_1$$

$$\text{よって、} \|e_n\|_1 \leq \frac{\beta_{n-1}+\beta_n}{\beta_{n-1}\beta_n}, \|e_n\|_1^2 \leq \frac{1}{\beta_n^2} + \frac{2}{\beta_{n-1}\beta_n} + \frac{1}{\beta_{n-1}^2}$$

$\{\beta_n\} \rightarrow \infty$  なので、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|_1^2 < \infty$  となるように  $\{\beta_n\}$  がとれることは、これで明らかである。

上の Conjecture であるように、 $\gamma$ -可測と  $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < \infty$  という条件は深く結びついているように思われる。しかし、 $\|\cdot\|_1$  が  $\gamma$ -可測でないとすれば、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < \infty$  の条件が  $\gamma$ -可測と無関係であることを示す一つの例になると思ったのであるが、現時点では、 $\|\cdot\|_1$  に関しては  $\gamma$ -可測かどうかは、まだ分かっていない。

## 5 $\ell^2$ 空間上の例

ここでは、前回の未解決であった箇所で、新たに得られた結果を紹介する。まず、そのために必要な用語を説明する。

$(\ell^2)^*$  を弱位相  $\sigma((\ell^2)^*, \ell^2)$  をもった  $\ell^2$  の代数的双対空間とし、 $\mathcal{I}$  を  $\{e_n\}_{n=1,2,\dots}$  を含む  $\ell^2$  の

代数的基とする。ただし、 $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  とする。 $(\cdot, \cdot)$  を  $(\ell^2)^*$  と  $\ell^2$  の natural pairing とする。  
 $n$  番目

シリンダー測度を次のように定義する。

$(\ell^2)^*$  上に次のような  $b$  をとり、これに対し、Dirac 測度  $\delta_b$  を考える。それから導入される  $\ell^2$  上のシリンダー測度を  $\mu_b$  とする。

$$b \in (\ell^2)^* \text{ s.t. } (a, e_n) = n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (a, e_\alpha) = 0, \quad e_\alpha \in \mathcal{I} \setminus \{e_n\}_{n=1,2,\dots}$$

$$\begin{aligned} \mu_b(\{x \in \ell^2; (\langle x, \xi_1 \rangle, \langle x, \xi_2 \rangle, \dots, \langle x, \xi_m \rangle) \in D\}) \\ = \delta_b(\{x \in (\ell^2)^*; ((x, \xi_1), (x, \xi_2), \dots, (x, \xi_m)) \in D\}) \end{aligned}$$

ただし、 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in \ell^2$ ,  $D \in \mathcal{B}(R^m)$  とする。

また、ノルムを次のように定義する。

$$\|\cdot\|_4 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n}{n}\right)^2} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$$

**定理 5.1**  $\|\cdot\|_4$  は  $\mu_b$ -可測 ( $D.F.L$ ) ではない。

**証明** 次の条件を満たすような  $\varepsilon_0 > 0$  が存在することを示せばよい。

任意の  $G \in FD(\ell^2)$  に対して、 $\mu_b(P_F(N_{\varepsilon_0}) + F^\perp) < 1 - \varepsilon_0$  を満たす  $G$  と直交する  $F \in FD(\ell^2)$  が存在する。

任意の  $G \in FD(\ell^2)$  に対して、 $\{\xi^j\}_{1,2,\dots,n}$  を  $G$  の正規直交基底とすると、 $\xi^j = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j e_i$ ,  $\alpha_i^j \in R, j = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots$  と表される。  
 次のような階数  $n$  の行列がとれる。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 & \dots & \alpha_{n+m}^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n & \dots & \alpha_{n+m}^n \end{pmatrix}$$

$N > n + m$  に対して、

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_N^1 \\ \vdots \\ -\alpha_N^n \end{pmatrix} \quad \dots (*)$$

は  $R^{n+m}$  上で解をもつ。

$\xi^j \in \ell^2$  なので、 $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i^j = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) となるので、任意の  $\delta > 0$  に対して、(\*) の解  $x_1 = \eta_1, \dots, x_{n+m} = \eta_{n+m}$  が、 $\max_{1 \leq i \leq n+m} |\eta_i| < \delta$  を満たすように  $N$  をとることができる。 $\tau = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{n+m} e_{n+m} + e_N$  とすると、 $\langle \tau, \xi^j \rangle = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) となる。 $F$  を  $\tau$  によって生成される  $\ell^2$  の 1 次元部分空間とすると、明らかに、 $F$  は  $G$  と直交する。

$\phi = \frac{\tau}{\|\tau\|}$  ( $\|\cdot\|$  は  $\ell^2$  のノルム) とすると、

$$(b, \phi) = (b, \tau) / \|\tau\|$$

$$= (\eta_1 + 2\eta_2 + \dots + (n+m)\eta_{n+m} + N) / \|\tau\|$$

$\mu_b$  は、 $F$  上で Dirac 測度  $\delta_{(b, \phi)\phi}$  となるので、 $(b, \phi)\phi \notin P_F(N_{\varepsilon_0})$  であることを示せばよい。

$(b, \phi)\phi \in P_F(N_{\varepsilon_0})$  として矛盾を導く。

$\delta < \frac{1}{(n+m)^2}$  とする。

$(b, \phi)\phi \in P_F(N_{\varepsilon_0})$  とすると、 $P_F x = (b, \phi)\phi$  となる  $x \in N_{\varepsilon_0}$  が存在する。

ところで、 $x \in N_{\varepsilon_0}$  に対して、

$$|\eta_1| | \langle x, e_1 \rangle | < \delta \varepsilon_0$$

$$|\eta_2| | \langle x, e_2 \rangle | < 2\delta \varepsilon_0$$

$\vdots$

$$|\eta_{n+m}| | \langle x, e_{n+m} \rangle | < (n+m)\delta \varepsilon_0$$

$$| \langle x, e_N \rangle | < N \varepsilon_0$$

となるので、

$$| \langle \tau, x \rangle |$$

$$= | \eta_1 \langle x, e_1 \rangle + \dots + \eta_{n+m} \langle x, e_{n+m} \rangle + \langle x, e_N \rangle |$$

$$\leq |\eta_1| | \langle x, e_1 \rangle | + \dots + |\eta_{n+m}| | \langle x, e_{n+m} \rangle | + | \langle x, e_N \rangle |$$

$$< \varepsilon_0 + \varepsilon_0 N$$

$$= (1 + N) \varepsilon_0$$

また、

$$| \langle \tau, x \rangle |$$

$$= | \eta_1 + 2\eta_2 + \dots + (n+m)\eta_{n+m} + N |$$

$$\geq N - |\eta_1| - 2|\eta_2| - \dots - (n+m)|\eta_{n+m}|$$

$$\begin{aligned}
&> N - \{1 + 2 + \dots + (n + m)\}\delta \\
&> N - \frac{1}{2} \cdot \frac{n + m + 1}{n + m} \\
&> N - 1
\end{aligned}$$

$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ とすると、矛盾する。

□

## 参考文献

- [1] Badrikian and Chevet, S. "*Measure clindriques, espaces de Wiener et fonctions aleatoires gaussiennes.*" Lecture Notes in Mathmatics No.379, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [2] Baxendale, P. "*Gaussian Measure on Function Spaces.*" Amer.J.Math. **98**(1976), 891-952.
- [3] Dudley, R.M., Feldman, J. and LeCam, L. "*On semi-norms and probabilities, and abstract Wiener Spaces.*" Ann.of Math. **93**(1971), 372-408.
- [4] Gong, F. "*A note on generalized Gross and Minlos Theorems.*" Dirichet forms and stchastic process (Beijing, 1993) 171-173, de Gruyter, Berlin, (1995).
- [5] Gross, L. "*Measurable functions on Hilbert space.*" Trans.Amer.Math.Soc. **164**(1972), 411-426.
- [6] Hagihara, R. "*Cylinder set measures and measurable norms on Banach space.*" 修士論文 (1998).
- [7] Harai-Maeda. "可測ノルムについての一考察" 数理解析研究所 講究録 1186, 15-27(2000).
- [8] Kuo, H.H. "*Gaussian Measure in Banach Space.*" Lect.Notes in Math.463, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975
- [9] Maeda, M. "*Some Examples of Measurable Norms.*" J.Math.Anal.Appl. **98**(1984), 158-165.
- [10] Maeda, M. "*Rotationary Invaiant Cylindrical Measure 1.*" Kodai.Math.J.Vol.6 No.1(1983), 14-25.

- [11] Maeda,M. "*Measurable norms and rotationally quasi-invariant cylindrical measures.*" Hokkaido Math.J.Vol.XII No.1(1983),92-104.
- [12] Maeda-Shibuya-Bandou. "無限次元空間上の可測ノルムの役割について" 数理解析研究所 講究録 1100,27-43(1999).
- [13] Minlos,R.A. "*Generalized random processes and their extension in measure.*" Selected translations in mathematical statistics and probability,3 Amer.Math.Soc.Providence(1959).
- [14] Linde,W. "*Probability in Banach Space-Stable and Infinitely Divisible Distributions.*" A Wiley-Interscience Publication 1986.
- [15] Prokhorov,Yu.V. "*Convergence for random processes and limit theorems in probability theory.*" Teor.Veroj.i Prim.1(1956),177-238.
- [16] Sazonov,V.V. "*Remarks on characteristic functionals.*" Theorey of probability and its applications,3(1958),201-205.
- [17] Schwartz,L. "*Radon Measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.*" Tata Institute of Fundamental Reserch Publication,Bombay 1973.
- [18] Yan,J.A. "*Generalization of Gross'and Minlos' Theorems.*" Lect.Notes in Math.,1372,Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong,(1989),395-404.